第1讲 二次根式

**知识梳理**

**1．二次根式的概念**

**(1)概念：**一般地，我们把形如\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_的式子叫做**二次根式**，“\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_”称为**二次根号**.

**【拓展】**①二次根式的概念是从形式上界定的，必须含有二次根号“”，如是二次根式，而不是二次根式.

②二次根式的被开方数*a*既可以是一个数，也可以是一个含有字母的式子，但前提必须保证*a*≥0，如(*x*≥0)均为二次根式，而则不是二次根式，则不一定是二次根式，只有在条件的限制下才是二次根式.

③像之类的式子也是二次根式，它表示的意义是*m*与的乘积，如表示

**例1：**下列式子中，哪些是二次根式，哪些不是二次根式？

[解]

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 序号 | 判断 | 原因 | 解题方法 |
| (1) | 是 | 符合二次根式的定义 | 含有二次根号，并且被开方数为非负数的式子是二次根式 |
| (2) | 是 | 符合二次根式的定义 |
| (3) | 不是 | 不含二次根号 |
| (4) | 不是 | 不含二次根号 |
| (5) | 是 | 符合二次根式的定义 |
| (6) | 是 | 符合二次根式的定义 |
| (7) | 不是 | 被开方数是负数 |

**(2)二次根式有意义的条件**

对于非负数*x*，如果*x*2=*a*，那么*x*就是*a*的算术平方根，也是*a*的二次方根，记作.在这里*a*是*x*的平方数，它的值是一个正数或零(因为任何数的平方都不可能是负数).由此得出只有当*a*≥0时，二次根式才有意义.

1)从总体上描述：在二次根式中，当*a*≥0时有意义；当*a*<0时无意义.

2)从具体的情况总结，如下：

①单个二次根式如有意义的条件：*A*≥0；

②多个二次根式相加如有意义的条件：

③二次根式作为分式的分母如有意义的条件：*A*>0；

④二次根式与分式的和如有意义的条件：

**例2：**当*x*是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

.

[解析]对于含有二次根式和分式的式子，求其有意义的条件时，首先找出二次根式的被开方数，根据二次根式的被开方数为非负数列不等式，其次找分式的分母，根据分母不为0列出所需的不等式.将这些不等式组成不等式组，不等式组的解集就是使二次根式有意义的字母的取值范围.

[解](1)当3*x*-1≥0，即时在实数范围内有意义.

(2)当-1-*x*≥0，即*x*≤-1时在实数范围内有意义.

(3)当*x*+2>0，即*x*>-2时在实数范围内有意义.

(4)当2*x*+3≥0，且*x*+1≠0，即且*x*≠-1时在实数范围内有意义.

(5)∵无论*x*为何实数，*x*2+5都大于0，∴无论*x*为何实数在实数范围内都有意义.

(6)∵无论*x*为何实数，-*x*2-2*x*-3=-(*x*+1)2-2<0，∴无论*x*为何实数在实数范围内都无意义.

**2．二次根式的性质**

**性质1：** **性质2：**

**性质3：** **性质4：**

**(1)关于、的性质**

①即一个非负数的算术平方根的平方等于这个非负数，这个性质正用可以去掉根号，也可逆用将一个非负数化成平方的形式，如

②由于*a*的平方等于*a*2，因此*a*是*a*2的一个平方根，当*a*≥0时，根据算术平方根的意义，有由此得出：

当*a*<0时，*a*2>0，所以一定有意义，由的非负性，当*a*<0时.因此，我们可以得到：

**例3：**计算：

[解析](1)(2)可直接利用性质计算.(3)、(4)运用性质计算，注意

[解](1)

|3.14-*π*|=*π*-3.14.

**(2)关于、** **的性质**

①，即积的算术平方根等于积中各因式的算术平方根的积.可运用它进行二次根式的化简.

运用此公式化简二次根式时，关键是将被开方数分解因数(因式)，把含有*a*2形式的*a*移到根号外面.

②，商的算术平方根等于商中分子和分母的算术平方根的商.

化简被开方数是分数(或分式)的二次根式时，先将其化为的形式，然后利用分式的基本性质，分子和分母同乘上一个适当的因式，化去分母中的根号即可.

**3．化简二次根式**

**概念：**把二次根式里被开方数所含的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_移到根号外，或者化去被开方数的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_的过程，称为“化简二次根式”.

如果二次根式里被开方数是几个因式的乘积，其中有的因式是完全平方式，那么这样的因式可用它的非负平方根代替后移到根号外面.

如果二次根式中被开方数是分式(或分数)，那么可以化去分母.方法是将分子和分母同乘一个不等于零的代数式，使分母变为完全平方式，再将分母用它的正平方根代替后移到根号外面作新的分母.

**例4：**化简：(1)

[解](1)

[点评]在利用积的算术平方根的性质：(*a*≥0，*b*≥0)进行化简时，一要注意公式中的限制条件；二要注意被开方数一定是乘积的形式，一定不要出现这样的错误.

**例5：**化简：

[解析]这类题可用来化简.

[解](1)

[提醒]当被开方数是带分数时，应先把它化成假分数.

**4．最简二次根式与同类二次根式**

**(1)概念：最简二次根式：**最简二次根式必须同时满足下列条件：

①\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

②\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

③\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

①被开方数中不含开方开得尽的因数或因式；

②被开方数中不含分母；

③分母中不含根式.

**同类二次根式：**二次根式化成最简二次根式后，若\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，则这几个二次根式就是**同类二次根式**.

**(2)化二次根式为最简二次根式的一般步骤：**

①把被开方数中的带分数或绝对值大于1的小数化成假分数，把绝对值小于1的小数化成分数；②被开方数是整数或整式，先将它分解因数或因式，然后把开得尽方的因数或因式化到根号外面；③化去分母中的根号或根号内的分母；④约分.

以上四个步骤，化简时不一定都用到，解题时，要根据需要选择适当的步骤.

**例6：**下列各式中哪些是最简二次根式，哪些不是？若不是，请说明理由.

[解析]判断一个二次根式是不是最简二次根式，就是看它是否满足最简二次根式的两个条件：①被开方数不含分母；②被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.不满足其中任何一个条件的二次根式都不是最简二次根式.

[解](4)(6)(8)中各式是最简二次根式，其余5个二次根式都不是最简二次根式，理由如下：

的被开方数不是整数；(2)的被开方数的因数不是整数；(3)的被开方数不是整式，含有分母；(5)的被开方数含能开得尽方的因式(*a*+的被开方数含能开得尽方的因数16.故它们都不是最简二次根式.

[点评]把二次根式化成最简二次根式，要注意以下三点：①被开方数是带分数的要先化成假分数；②被开方数是小数的要先化成分数；③被开方数是多项式且能进行因式分解的要先进行因式分解.

**例7：**下列二次根式，哪些是同类二次根式：

**解：**将二次根式化成最简二次根式，得

所以，与是同类二次根式，与是同类二次根式.

**5．二次根式的运算**

**(1)二次根式的加减**

整式的加减归结为合并同类项，二次根式的加减也归结为**合并同类二次根式.**

先把二次根式化成\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，再把同类二次根式分别合并.

合并同类二次根式的法则是：将同类二次根式的系数\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_仍作为系数，根指数与被开方数\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

**(2)二次根式的乘法**

二次根式相乘，把\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_相乘，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_不变，即\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

用语言叙述为：二次根式相乘，把被开方数相乘，根指数不变.

[提醒](1)此公式成立的前提条件必须是*a*≥0，*b*≥0.

(2)此公式中的*a*，*b*既可以是一个数，也可以是一个单项式，还可以是一个多项式.

(3)当二次根式前面有系数时，可类比单项式乘单项式的法则进行运算，即系数之积作为系数，被开方数之积作为被开方数.

即

(4)当三个或多个二次根式相乘时，可以将所有的二次根式的被开方数相乘，用它们的积作为积的被开方数.

即

(5)若二次根式相乘的结果能写成*a*2的形式，则应化简.如

**(3)二次根式的除法**

二次根式相除，把\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_相除，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_不变，即\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

用语言叙述为：二次根式相除，把被开方数相除，根指数不变.

[提醒](1)因为是两个二次根式相除，所以被开方数必须是非负数，又分母不为零，故*a*≥0，*b*>0.

(2)此公式中的*a*，*b*既可以是一个数，也可以是一个单项式，还可以是一个多项式.

(3)进行除法运算时，若两个被开方数可以整除，就直接运用二次根式的除法法则进行计算.若两个被开方数无法整除，可以对二次根式化简或变形后再相除.

(4)对于三个或三个以上的二次根式的除法运算，必须按顺序从左向右进行计算.

(5)被开方数若是带分数，应先化为假分数再应用公式化简.如计算应先化为再计算，避免出现这样的错误.

**例8：**计算：

[解析]先将二次根式化成最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并.

[解](1)原式

(2)原式

[提醒](2)中的不要写成

[解析]先将二次根式化成最简二次根式，再将被开方数相同的二次根式进行合并.

[解](3)原式

(4)原式

由可知*p*-*q*>0，

所以

**例9：**计算：

；

[解析](1)(2)均可直接运用二次根式的乘法法则进行计算，对于(3)(4)，应先把根号外面的有理数相乘，再利用二次根式的乘法法则进行计算.另外对于(3)还要注意先确定积的符号.

[解](1)

[点评]二次根式相乘时，先把被开方数相乘，根指数不变.如果积中有能开得尽方的因数或因式，一定要开尽方.在计算多个二次根式相乘时，对被开方数要进行分解因数，以便将开得尽方的因数移到根号外，从而可以使运算简便.

**例10：**计算：

[解析]利用二次根式的除法法则进行计算，且被开方数相除时，可以用“除以一个不等于0的数等于乘这个数的倒数”进行约分、化简.

[解](1)

-4*ab*：

[点评]两个二次根式相除，可采用根号前的系数与系数对应相除，根号内的被开方数与被开方数对应相除，再把除得的结果相乘.

**6．分母有理化和有理化因式**

分母有理化：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

二次根式的除法可以先写成分式的形式，然后通过分母有理化去完成.

两个含有二次根式的非零代数式相乘，如果它们的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_不含有二次根式，我们就说这两个含有二次根式的代数式**互为有理化因式**.如*+*与*-*互为有理化因式，与也互为有理化因式.

**例11：**把下列各式分母有理化：

**解：**

(4)由*m*≠*n*，得

注意到第(3)小题的分子*m*-*n*=

所以也可以这样解，

**7．二次根式的混合运算**

二次根式的混合运算是指二次根式的加、减、乘、除、乘方、开方的混合运算.它的运算法则与实数的运算法则一样，即先乘方，再乘除，最后加减，有括号的先算括号里面的.

[提醒]在进行二次根式的混合运算时，除了需要掌握有关的法则和性质外，还要注意以下几个问题：

(1)实数运算中的运算法则、运算律和乘法公式等在二次根式的运算中仍然适用；

(2)在二次根式的混合运算中，一般先将每一个二次根式化为最简二次根式，再按运算法则计算.运算的结果可能是二次根式，也可能是有理式，如果是二次根式，要化为最简二次根式.

**8．二次根式混合运算中几种常见的模型及运算方法**

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

[特别提醒]进行二次根式的计算时，能用乘法公式的要尽量使用乘法公式，有时还需要灵活运用公式和逆用公式，这样可以使计算过程大大简化.

**例12：**计算：

(3)

[解](1)

(3)

[点评]二次根式乘除混合运算的方法与整式乘除混合运算的方法相同，整式乘除法的一些法则、公式在二次根式的乘除法运算中仍然适用.

**例13：**计算：

[解析]根据单项式乘多项式、多项式乘多项式、多项式除以单项式法则及乘法公式进行计算.

[解](1)原式

(2)原式

(3)原式

(4)原式

(5)原式

(6)原式

**例14：**计算：

解：(1)

(2)

**典型解析**

**例1：**(1)如果那么( ).

A.

(2)已知则2*xy*的值为( ).

A.-15 B.15 C.

[解析](1)因为二次根式具有非负性，所以即1-2*a*≥0，解得故选B；(2)根据二次根式的被开方数为非负数可求出*x*，*y*的值，即解得从而求出*y*=-3，所以.故选A.

[答案](1)B；(2)A

**例2**：（1）化简：

（2）化简下列二次根式

①； ②6*y*； ③ .

**例3：**已知△*ABC*的三条边长分别为*a*，*b*，*c*，其中*a*和*b*满足求第三边长*c*的取值范围.

[解析]本题只要根据条件求出*a*，*b*的值，再利用三角形的三边关系即可解答所求问题.

[答案]根据和平方数的非负性，得(*b*-2)2≥0.

由题意，得*a*-3=0，*b*-2=0，解得*a*=3，*b*=2.

所以1<*c*<5，

即第三边长*c*的取值范围是1<*c*<5.

**例4：**计算：

解：(1).

如果二次根式相除的结果是根式，那么必须化成最简根式.

由除式中可知*uv*>0.

所以

由*a*+*b*≥0

可知*c*(*a*-*b*)>0.

所以

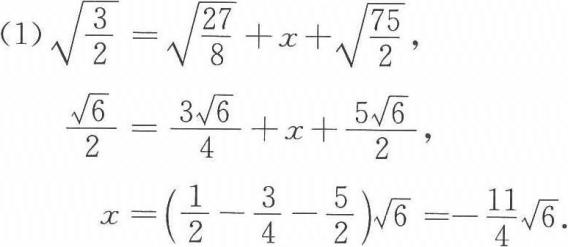
**例5：**把下列各式中根号外的因数(式)移到根号内：

[解析]将根号外的因数(式)移到根号内时，要将根号外的非负因数(式)改写成完全平方的形式作为被开方数(式)，如实际上是运用了公式.若根号外的因数(式)是负的，则负号不能移入根号内，如，移到根号内的因数(式)必须是正的，但有些字母的取值范围需由隐含条件得出，如(3)(4)两题.

[解](1)

[点评]根号外的负号不能移到根号内，如第(2)题；若根号外有字母，则要判断根号外因式的符号，若符号是负的，则负号要留在根号外，如第(5)题.

**例6：**解方程与不等式：

解：

由

得

所以，原不等式的解集是

不等式两边同除(乘)以一个负数，不等号要改变方向.

**例7：**解下列方程与不等式：

(1)-2*x*=； (2)*x*+6>*x*.

**解：**(1)-2*x*=，

*x*=，

因为

所以，原方程的解是

(2)*x*+6>*x*，

()*x*>-6，

【注意判断不等号方向改变.】

*x*<12+6.

所以，原不等式的解集是*x*<12+6.

**同步训练**

**一、填空题**

1.二次根式有意义的条件是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：*x*≥0且*x*≠9

2.若*m*<0，则=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：-*m*

3.成立的条件是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：*x*≥1

4.

答案：

5.计算=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

6.方程的根是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

7.计算：=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

8.化去根号内的分母：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：

**二、选择题**

9.下列式子一定是二次根式的是( ).

答案：C

10.小明的作业本上有以下四题：做错的题是( ).

A.① B.② C.③ D.④

答案：D

**三、解答题**

11.解不等式：

答案：

12.计算：.

解：解法一：(1)原式

(2)原式

解法二：(1)原式

(2)原式

(3)

13.解下列不等式和方程：

答案：

**走进中考**

1．（2013·上海中考）下列式子中，属于最简二次根式的是（ ）

（A）； （B）； （C）； （D）．

答案：B

2．（2017·上海中考）计算：

答案：2+

3．（2016·上海中考）计算：

答案：原式

**三角形复习**

1．已知：*AB*=4，*AC*=2，*D*是*BC*中点，*AD*是整数，求*AD*.



解：延长*AD*到*E*，使*AD*=*DE*

∵*D*是*BC*中点

∴*BD*=*DC*

在△*ACD*和△*BDE*中

*AD*=*DE*

∠*BDE*=∠*ADC*

*BD*=*DC*

∴△*ACD*≌△*BDE*

∴*AC*=*BE*=2

∵在△*ABE*中

*AB*-*BE*＜*AE*＜*AB*+*BE*

∵*AB*=4

即4-2＜2*AD*＜4+2

1＜*AD*＜3

∴*AD*=2

2．已知：*D*是*AB*中点，∠*ACB*=90°，求证：.



延长*CD*与*P*，使*D*为*CP*中点.连接*AP*，*BP*

∵*DP*=*DC*，*DA*=*DB*

∴*ACBP*为平行四边形

又∠*ACB*=90

∴平行四边形*ACBP*为矩形

∴*AB*=*CP*

∴*CD*=1/2*AB*